Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 05.09.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. a) Data je $n \times n$ Hilbertova matrica definisana sa

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Primjetimo da je npr. $h_{11} = 1$, $h_{23} = \frac{1}{4}$, $h_{3n} = \frac{1}{n+2}$. Izraziti proizvoljan element h_{ij} pomoću formule u kojoj figurišu indeksi i i j.

b) Neka je V skup uređenih parova (x, y) realnih brojeva, $V = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$, i neka je na V definisano sabiranje na sljedeći način

$$(x, y) + (u, v) = (\sqrt{x^2 + u^2}, \sqrt{y^2 + v^2}).$$

Odrediti da li je $(V, +)$ grupa. Da li je grupa Abelova?

2. Odrediti za koje vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ će determinanta n-tog reda

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-1)-a \end{vmatrix}$$

imati vrijednost različitu od nule.

3. a) Odrediti opšte rješenje homogenog sistema

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ 4x + 2y + z &= 0 \\ 6x + 3y + z &= 0 \\ 8x + 4y + z &= 0 \;. \end{aligned}$$

b) Objasniti zašto linearni sistem od m jednačina sa n nepoznatih $(m, n \geq 2)$ nikad ne može imati tačno dva različita rješenja. Proširiti svoje argumente u objašnjenju i obrazložiti da li je tačno da ako sistem ima više od jednog rješenja, tada mora imati beskonačno mnogo različitih rješenja.

4. Odrediti minimalni polinom matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Šta je minimalni polinom?

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Data je $n\times n$ Hilbertova matrica definisana sa

$$H=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

Primjetimo da je npr. $h_{11}=1$, $h_{23}=\frac{1}{4}$, $h_{3n}=\frac{1}{n+2}$. Izraziti proizvoljan element h_{ij} pomoću formule u kojoj figurišu indeksi i i j.

Rj.

Prvo primjetimo da je matrica simetrična tj. nije bitno da li posmatramo h_{ij} ili h_{ji} $(h_{ij}=h_{ji})$ Npr.

$h_{12}=h_{21}=\frac{1}{2}$, $h_{1n}=h_{n1}=\frac{1}{n}$, ...

Posmatrajmo dijagonalu $h_{11}=1$, $h_{22}=\frac{1}{3}$, $h_{33}=\frac{1}{5}$, ..., $h_{nn}=\frac{1}{2n-1}$

Iz dijagonale možemo zaključiti da je $h_{ii}=\frac{1}{i+i-1}$

Posmatrajmo sad npr. drugu vrstu

$h_{21}=\frac{1}{2}$, $h_{22}=\frac{1}{3}$, $h_{23}=\frac{1}{4}$, ..., $h_{2n}=\frac{1}{n+1}$

Prema drugoj vrsti $h_{2i}=\frac{1}{2+i-1}$.

Možemo zaključiti

$$h_{ij}=\frac{1}{i+j-1}.$$

(#) Neka je V skup svih uređenih paravova (x,y) realnih brojeva

$$V=\{(x,y)\ |\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

i neka je na V definisano sabiranje na sljedeći način

$$(x,y)+(u,v)=\left(\sqrt{x^2+u^2},\ \sqrt{y^2+v^2}\right).$$

Odrediti da li je $(V,+)$ grupa. Da li je grupa Abelova

Rj. Da bi uređen par $(V,+)$ bio Abelova grupa potrebno je i dovoljno da operacija + zadovoljava sljedeće uslove: zatvorenost, asocijativnost, postojanje neutralnog i inverznog elementa i komutativnost.

ZATVORENOST $\forall (x,y),(u,v)\in V \quad (x,y)+(u,v)\in V$

$$(x,y)+(u,v)=(\underbrace{\sqrt{x^2+u^2}}_{\in\mathbb{R}},\underbrace{\sqrt{y^2+v^2}}_{\in\mathbb{R}})\in V$$ vrijedi zatvorenost

ASOCIJATIVNOST $\forall (x,y),(u,v),(a,b)\in V \quad [(x,y)+(u,v)]+(a,b)=(x,y)+[(u,v)+(a,b)]$

$$[(x,y)+(u,v)]+(a,b)=\left(\sqrt{x^2+u^2},\sqrt{y^2+v^2}\right)+(a,b)=\left(\sqrt{x^2+u^2+a^2},\ \sqrt{y^2+v^2+b^2}\right)$$

$$(x,y)+[(u,v)+(a,b)]=(x,y)+\left(\sqrt{u^2+a^2},\sqrt{v^2+b^2}\right)=\left(\sqrt{x^2+u^2+a^2},\ \sqrt{y^2+v^2+b^2}\right)$$

vrijedi asocijativnost

NEUTRALNI ELEMENT $\exists (e,f)\in V$ t.d. $(e,f)+(x,y)=(x,y)$ za $\forall (x,y)\in V$

$$\left.\begin{aligned}(e,f)+(x,y)&=\left(\sqrt{e^2+x^2},\ \sqrt{f^2+y^2}\right)\\(e,f)+(x,y)&=(x,y)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}\sqrt{e^2+x^2}&=x\\\sqrt{f^2+y^2}&=y\end{aligned}$$

Primjetimo da je $\sqrt{e^2+x^2}\geqslant 0$ za $\forall x,e\in\mathbb{R}$

Prema tome ne postoji $e\in\mathbb{R}$ tako da $\sqrt{e^2+x^2}=x$

(ako bi za e uzeli nula, $e=0$ tada $\sqrt{e^2+x^2}=\sqrt{x^2}=|x|\neq x$)

Ne postoji neutralni element za datu operaciju sabiranja.

$(V,+)$ nije grupa (pa time nije ni Abelova grupa).

(#) Odrediti za koje vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ će determinanta n-tog reda

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-a \end{vmatrix}$$

imati vrijednost različitu od nule.

Rj. Prije nego izračunamo determinantu n-tog reda izračunajmo determinante drugog, trećeg i četvrtog reda.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} \overset{II_v - I_v}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -a$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v - I_v}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (-a)(1-a)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-a \end{vmatrix} \underset{\substack{III_v - I_v \\ IV_v - I_v}}{\overset{II_v - I_v}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = (-a)(1-a)(2-a)$$

Sad nije teško izračunati determinantu n-tog reda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-a \end{vmatrix} \underset{\substack{\vdots \\ (N)_v - I_v}}{\overset{\substack{II_v - I_v \\ III_v - I_v \\ IV_v - I_v}}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-2)-a \end{vmatrix} \overset{\text{ispod dijagonale su sve nule}}{=\!=}$$

$$= (-a)(1-a)\cdots((n-2)-a)$$

Data determinanta n-tog reda će imati vrijednost različitu od nule za svako $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \ldots, n-2\}$

Odrediti opšte rješenje homogenog sistema

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=0\\ 4x+2y+z&=0\\ 6x+3y+z&=0\\ 8x+4y+z&=0. \end{aligned}$$

Rj: Sistem riješimo Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A}=[A\mid b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&0\\ 4&2&1&0\\ 6&3&1&0\\ 8&4&1&0 \end{array}\right] \underset{\substack{III_v - I_v\cdot 3\\ IV_v - I_v\cdot 4}}{\overset{II_v - I_v\cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&-2&0\\ 0&0&-3&0 \end{array}\right]\sim$$

$$\underset{IV_v+II_v\cdot(-3)}{\overset{III_v+II_v\cdot(-2)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2&1&1&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right] \Rightarrow \quad \text{rang}\, A=\text{rang}\,\bar{A}=2<\underset{\substack{\uparrow\\ \text{broj}\\ \text{nepoznatih}}}{3}$$

pa prema Kroneker-Kapelijevoj metodi sistem ima beskonačno mnogo rješenja i jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=0\\ -z&=0\\ \hline 2x+y&=0\\ y&=-2x \end{aligned}$$

Ako je $x=t$ tada je
$(t,-2t,0),\ t\in\mathbb{R}$
opšte rješenje sistema.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ako uzmemo } y=t \text{ tada je } x=-\frac{1}{2}t \text{ pa je}\\ (-\frac{1}{2}t,\ t,\ 0),\ t\in\mathbb{R}\\ \text{opšte rješenje sistema}\end{array}}$

(#) Objasniti zašto linearni sistem od m jednačina sa n nepoznatih $(m,n \geq 2)$ nikad ne može imati tačno dva različita rješenja. Proširiti svoje argumente u objašnjenju i obrazložiti da li je tačno da ako sistem ima više od jednog rješenja, tada mora imati beskonačno mnogo različitih rješenja.

Rj. Posmatrajmo neki sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

i neka su $x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ dva različita rješenja.

Tada nije teško vidjeti da je i $z = \begin{pmatrix} \frac{c_1+d_1}{2} \\ \frac{c_2+d_2}{2} \\ \vdots \\ \frac{c_n+d_n}{2} \end{pmatrix}$ treće

rješenje sistema koje je različito i od x i od y.
(objasniti riječima zašto je z rješenje sistema).

Prema tome ako sistem ima dva različita rješenja uvijek možemo konstruisati treće rješenje, pa sistem nikad ne može imati tačno dva različita rješenja.

Nastavljajući ovaj proces, od dva različita rješenja uvijek možemo dobiti treće rješenje, koje je različito od dva rješenja od kojih je formirano, pa ako sistem ima više od jednog rješenja tada mora imati beskonačno mnogo različitih rješenja.

7) Odrediti minimalni polinom matrice $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 2\\ -4 & 0 & -2\\ -4 & -1 & -1\end{bmatrix}$

Rj. Minimalni polinom matrice A je monik polinom $m(\lambda)$ najmanjeg stepena za koji vrijedi $m(A)=0$.

Prvo odredimo karakteristični polinom matrice A.

Karakteristični polinom ćemo označiti sa $k(\lambda)$ i on se računa po formuli $k(\lambda)=\det(\lambda I-A)$.

$$k(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -1 & -2\\ 4 & \lambda & 2\\ 4 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix} \overset{I_v+III_v}{=\!=} \begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & \lambda-1\\ 4 & \lambda & 2\\ 4 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & \lambda & 2\\ 4 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix} \overset{III_k-I_k}{=\!=} (\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & \lambda & -2\\ 4 & 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda-1)\underbrace{\begin{vmatrix}\lambda & -2\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}}_{\lambda^2-3\lambda+2}=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$k(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ karakteristični polinom matrice A.

Znamo da minimalni polinom mora djeliti karakteristični polinom. Također svaki nesvodljivi faktor od $k(\lambda)$ (u našem slučaju nesvodjivi faktori su $(\lambda-1)$ i $(\lambda-2)$) je također faktor od $m(\lambda)$. Prema tome $m(\lambda)$ je tačno jedan od sljedećih polinoma

ili $f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$ ili $g(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

Prema Cayley-Hamiltonovoj teoremi znamo da je $k(A)=0$. Dovoljno je samo izračunati $f(A)$

$$f(A)=(A-I)(A-2I)=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ -4 & -1 & -2\\ -4 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -4 & -2 & -2\\ -4 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Prema tome $m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^2-3\lambda+2$ je minimalni polinom matrice.